खण्ड—A / SECTION—A

1. (a) माना H, $\mathbb{R}^4$ की एक उपसमष्टि है, जो कि सदिशों $v_1 = (1, -2, 5, -3)$, $v_2 = (2, 3, 1, -4)$, $v_3 = (3, 8, -3, -5)$ द्वारा जनित है। तब H का एक आधार एवं विमा ज्ञात कीजिए तथा H के इस आधार को $\mathbb{R}^4$ के एक आधार तक विस्तृत कीजिए।

Let H be a subspace of $\mathbb{R}^4$ spanned by the vectors $v_1 = (1, -2, 5, -3)$, $v_2 = (2, 3, 1, -4)$, $v_3 = (3, 8, -3, -5)$. Then find a basis and dimension of H, and extend the basis of H to a basis of $\mathbb{R}^4$. 10

(b) माना $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ एक रैखिक संकारक है तथा $\mathbb{R}$ पर $\mathbb{R}^3$ का एक आधार $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ है। माना कि $Tv_1 = (1, 1, 0)$, $Tv_2 = (1, 0, -1)$, $Tv_3 = (2, 1, -1)$ है। T की परिसर समष्टि तथा शून्य समष्टि के लिए एक आधार ज्ञात कीजिए।

Let $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be a linear operator and $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ be a basis of $\mathbb{R}^3$ over $\mathbb{R}$. Suppose that $Tv_1 = (1, 1, 0)$, $Tv_2 = (1, 0, -1)$, $Tv_3 = (2, 1, -1)$. Find a basis for the range space and null space of T. 10

(c) x के सभी मानों के लिए फलन

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 - e^{-1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

के सांतत्य की चर्चा कीजिए।

Discuss the continuity of the function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 - e^{-1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

for all values of x. 10

(d) टेलर प्रमेय द्वारा $\ln(x)$ का $(x-1)$ की घात में प्रसार कीजिए तथा $\ln(1 \cdot 1)$ का दशमलव के चार स्थानों तक सही मान ज्ञात कीजिए।

Expand $\ln(x)$ in powers of $(x-1)$ by Taylor's theorem and hence find the value of $\ln(1 \cdot 1)$ correct up to four decimal places. 10

(e) वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - y + z = 3$ से होकर जाने वाले लम्ब वृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the right circular cylinder which passes through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - y + z = 3$. 10

2. (a) माना $\mathbb{R}$ के ऊपर $\mathbb{R}^3$ पर एक रैखिक संकारक T, $T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$ द्वारा परिभाषित है। क्या T व्युत्क्रमणीय है? यदि हाँ, तो अपने उत्तर का तर्क प्रस्तुत कीजिए तथा T^{-1} ज्ञात कीजिए।

Consider a linear operator T on $\mathbb{R}^3$ over $\mathbb{R}$ defined by $T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$. Is T invertible? If yes, justify your answer and find T^{-1}. 15

(b) यदि $u = (x+y)/(1-xy)$ तथा $v = \tan^{-1} x + \tan^{-1} y$ है, तब $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ ज्ञात कीजिए। क्या u तथा v फलनतः सम्बन्धित हैं? यदि हाँ, तो सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।

If $u = (x+y)/(1-xy)$ and $v = \tan^{-1} x + \tan^{-1} y$, then find $\partial(u, v)/\partial(x, y)$. Are u and v functionally related? If yes, find the relationship. 15

(c) रेखा $x = 3-6t,\ y = 2t,\ z = 3+2t$ का समतल $3x+4y-5z+26=0$ में प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।

Find the image of the line $x = 3-6t,\ y = 2t,\ z = 3+2t$ in the plane $3x+4y-5z+26=0$. 20

3. (a) माना $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र पर एक सदिश समष्टि दर्शाता है। $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ के मानक आधार के सन्दर्भ में $\phi(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} v$ द्वारा दिए गए रैखिक प्रतिचित्रण $\phi: V \to V$ का आव्यूह ज्ञात कीजिए और तब ϕ की कोटि (रैंक) ज्ञात कीजिए। क्या ϕ व्युत्क्रमणीय है? अपने उत्तर का तर्क प्रस्तुत कीजिए।

Let $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ denote a vector space over the field of real numbers. Find the matrix of the linear mapping $\phi: V \to V$ given by $\phi(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} v$ with respect to standard basis of $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, and hence find the rank of ϕ. Is ϕ invertible? Justify your answer. 15

(b) ऊँचाई h तथा अर्ध-शीर्ष कोण α वाले एक शंकु के अंतर्गत सबसे बड़े बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

Find the volume of the greatest cylinder which can be inscribed in a cone of height h and semi-vertical angle α. 20

(c) शंकु $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 3yz + 12x - 11y + 6z + 4 = 0$ का शीर्ष ज्ञात कीजिए।

Find the vertex of the cone $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 3yz + 12x - 11y + 6z + 4 = 0$. 15

4. (a) माना $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ एक 3×3 आव्यूह है। A का अभिलाक्षणिक मान तथा संगत अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए। अतः A^{-15} का अभिलाक्षणिक मान तथा संगत अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए, जहाँ $A^{-15} = (A^{-1})^{15}$ है।

Let $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ be a 3×3 matrix. Find the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of A. Hence find the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of A^{-15}, where $A^{-15} = (A^{-1})^{15}$. 20

(b) द्विशः समाकलन का प्रयोग करते हुए हृदयाभ (कार्डिआॅइड) $r = a(1+\cos\theta)$ के अन्दर तथा वृत्त $r = a$ के बाह्य स्थित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Using double integration, find the area lying inside the cardioid $r = a(1+\cos\theta)$ and outside the circle $r = a$. 15

(d) उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो समतल $3x+2y-z+2=0$ को बिन्दु $(1, -2, 1)$ पर स्पर्श करता है और गोले $x^2+y^2+z^2-4x+6y+4=0$ को लांबिकतः काटता है।

Find the equation of the sphere which touches the plane $3x+2y-z+2=0$ at the point $(1, -2, 1)$ and cuts orthogonally the sphere $x^2+y^2+z^2-4x+6y+4=0$. 15

खण्ड—B / SECTION—B

5. (a) वक्र-कुल $r = c(\sec\theta + \tan\theta)$ के लम्बकोणीय संछेदी ज्ञात कीजिए, जहाँ c एक प्राचल है।

Find the orthogonal trajectories of the family of curves $r = c(\sec\theta + \tan\theta)$, where c is a parameter. 10

(b) लाप्लास रूपान्तर का प्रयोग करते हुए समाकलन समीकरण $y(t) = \cos t + \int_0^t y(x)\cos(t-x)\,dx$ को हल कीजिए।

Solve the integral equation $y(t) = \cos t + \int_0^t y(x)\cos(t-x)\,dx$ using Laplace transform. 10

(c) किसी समय t (सेकण्ड में) पर एक चर समांतर-षट्फलक की सहावसानी किनारे सदिशों

$$\bar{\alpha} = t\hat{i} + (t+1)\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$$
$$\bar{\beta} = 2t\hat{i} + (3t-1)\hat{j} + t\hat{k}$$
$$\bar{\gamma} = \hat{i} + 3t\hat{j} + \hat{k}$$

द्वारा निरूपित हैं। समांतर-चतुर्भुज, जिसकी सहावसानी किनारे $\bar{\alpha}$ और $\bar{\gamma}$ हैं, के सदिशीय क्षेत्रफल की परिवर्तन दर क्या है? $t=1$ सेकण्ड पर समांतर-षट्फलक के आयतन की परिवर्तन दर भी ज्ञात कीजिए।

At any time t (in seconds), the coterminous edges of a variable parallelepiped are represented by the vectors

$$\bar{\alpha} = t\hat{i} + (t+1)\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$$
$$\bar{\beta} = 2t\hat{i} + (3t-1)\hat{j} + t\hat{k}$$
$$\bar{\gamma} = \hat{i} + 3t\hat{j} + \hat{k}$$

What is the rate of change of the vectorial area of the parallelogram, whose coterminous edges are $\bar{\alpha}$ and $\bar{\gamma}$? Also find the rate of change of the volume of the parallelepiped at $t=1$ second. 10

(d) एक ठोस गोले के ऊपर समान त्रिज्या का एक ठोस गोलार्ध साम्यावस्था में रखा है। दो स्थितियों में—*(i)* जब गोलार्ध का वक्रीय पृष्ठ तथा *(ii)* जब गोलार्ध का समतलीय पृष्ठ गोले पर स्थित है, साम्यावस्था का स्थायित्व ज्ञात कीजिए।

A solid hemisphere rests in equilibrium on a solid sphere of equal radius. Determine the stability of the equilibrium in the two situations—*(i)* when the curved surface and *(ii)* when the flat surface of the hemisphere rests on the sphere. 10

(e) (i) माना C एक समतल वक्र $\bar{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j}$ है, जहाँ f और g के द्वितीय कोटि के अवकलज हैं। दर्शाइए कि वक्र के किसी बिन्दु पर वक्रता

$$\kappa = \frac{|f'(t)\,g''(t) - g'(t)\,f''(t)|}{([f'(t)]^2 + [g'(t)]^2)^{3/2}}$$

है। इस वक्र के किसी बिन्दु पर ऐंठन (टॉर्शन) τ का मान क्या है?

Let C be a plane curve $\bar{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j}$, where f and g have second-order derivatives. Show that the curvature at a point is given by

$$\kappa = \frac{|f'(t)\,g''(t) - g'(t)\,f''(t)|}{([f'(t)]^2 + [g'(t)]^2)^{3/2}}$$

What is the value of torsion τ at any point of this curve? 5

(ii) दर्शाइए कि किसी वक्र के दो क्रमागत बिन्दुओं पर मुख्य अभिलम्ब प्रतिच्छेद नहीं करते जब तक कि ऐंठन (टॉर्शन) τ शून्य न हो।

Show that the principal normals at two consecutive points of a curve do not intersect unless torsion τ is zero. 5

6. (a) लम्बाई l की छः हल्की छड़ों द्वारा निर्मित एक सम चतुष्फलक एक चिकने क्षैतिज समतल पर रखा है। W भार तथा r त्रिज्या का एक छल्ला तिर्यक् भुजाओं द्वारा आलम्बित है। कल्पित कार्य सिद्धान्त का उपयोग करते हुए किसी भी एक क्षैतिज भुजा में प्रतिबल ज्ञात कीजिए।

A regular tetrahedron, formed of six light rods, each of length l, rests on a smooth horizontal plane. A ring of weight W and radius r is supported by the slant sides. Using the principle of virtual work, find the stress in any of the horizontal sides. 15

(b) सरल आवर्त गति में एक कण की दो स्थितियों में वेग u और v हैं तथा दो संगत त्वरण f_1 और f_2 हैं। k के किस मान/किन मानों के लिए दोनों स्थितियों के बीच की दूरी $k(v^2 - u^2)$ है? यह भी दर्शाइए कि गति का आयाम

$$\frac{1}{f_2^2 - f_1^2}\,[(u^2 - v^2)(u^2 f_2^2 - v^2 f_1^2)]^{1/2}$$

है।

A particle executes simple harmonic motion such that in two of its positions, velocities are u and v, and the two corresponding accelerations are f_1 and f_2. For what value(s) of k, the distance between the two positions is $k(v^2 - u^2)$? Show also that the amplitude of the motion is

$$\frac{1}{f_2^2 - f_1^2}\,[(u^2 - v^2)(u^2 f_2^2 - v^2 f_1^2)]^{1/2}$$

15

(c) (i) एक हल के रूप में $u(x) = -e^{-x}$ का उपयोग करते हुए अवकल समीकरण $xy'' + (x-1)y' - y = 0$ का दूसरा हल ज्ञात कीजिए।

Find the second solution of the differential equation $xy'' + (x-1)y' - y = 0$ using $u(x) = -e^{-x}$ as one of the solutions. 10

(ii) प्राचल-विचरण विधि का उपयोग कर अवकल समीकरण $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Find the general solution of the differential equation $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x$ by the method of variation of parameters. 10

7. (a) आयतीय क्षेत्र $R : |x - x_0| \le a$, $|y - y_0| \le b$ में प्रारम्भिक मान समस्या $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ के अद्वितीय हल के अस्तित्व के लिए अद्वितीयता प्रमेय का कथन लिखिए। एक उपयुक्त आयत R में प्रारम्भिक मान समस्या $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$, $y(1) = 0$ के हल के अस्तित्व और अद्वितीयता का परीक्षण कीजिए। यदि एक से अधिक हल मौजूद है, तो सभी हलों को ज्ञात कीजिए।

State uniqueness theorem for the existence of unique solution of the initial value problem $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ in the rectangular region $R : |x - x_0| \le a$, $|y - y_0| \le b$. Test the existence and uniqueness of the solution of the initial value problem $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$, $y(1) = 0$, in a suitable rectangle R. If more than one solution exist, then find all the solutions. 15

(b) लम्बाई l की एक हल्की अवितान्य डोरी द्वारा एक नियत बिन्दु से ऊर्ध्वाधर लटका हुआ एक भारी कण प्रारम्भिक वेग u के साथ एक वृत्त में घूमना शुरू करता है ताकि एक ऊर्ध्वाधर समतल में एक पूर्ण परिक्रमण कर सके। दर्शाइए कि किसी भी व्यास के सिरों पर तनावों का योग अचर है।

A heavy particle hanging vertically from a fixed point by a light inextensible string of length l starts to move with initial velocity u in a circle so as to make a complete revolution in a vertical plane. Show that the sum of tensions at the ends of any diameter is constant. 15

(c) स्टोक्स प्रमेय का कथन लिखिए तथा इसको सदिश क्षेत्र $\vec{F} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$ के लिए, पृष्ठ S पर जो कि बेलन $z = 1 - x^2$; $0 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$ का उपरिमुखी अभिविन्यस्त भाग है, सत्यापित कीजिए।

State Stokes' theorem and verify it for the vector field $\vec{F} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$ over the surface S, which is the upwardly oriented part of the cylinder $z = 1 - x^2$, for $0 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$. 20

8. *(a)* लाप्लास रूपान्तर का उपयोग करके प्रारम्भिक मान समस्या

$$y'' + 2y' + 5y = \delta(t-2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

को हल कीजिए, जहाँ $\delta(t-2)$ डिरैक डेल्टा फलन को दर्शाता है।

Using Laplace transform, solve the initial value problem

$$y'' + 2y' + 5y = \delta(t-2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

where $\delta(t-2)$ denotes the Dirac delta function. 15

(b) गाऊस के अपसरण प्रमेय का उपयोग करते हुए बेलन $x^2 + y^2 = 16$ तथा समतलों $z = 1$ और $z = 5$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र पर समाकल

$$\iint_S (y^2\hat{i} + xz^3\hat{j} + (z-1)^2\hat{k}) \cdot \hat{n}\, dS$$

का मान निकालिए।

Using Gauss divergence theorem, evaluate the integral

$$\iint_S (y^2\hat{i} + xz^3\hat{j} + (z-1)^2\hat{k}) \cdot \hat{n}\, dS$$

over the region bounded by the cylinder $x^2 + y^2 = 16$ and the planes $z = 1$ and $z = 5$. 15

(c) d दूरी से एक कण को समान दूरी पर स्थित एक वृत्त में उसके वेग के बराबर वेग से 45° के कोण पर प्रक्षेपित करने पर वह केन्द्रीय त्वरण $\mu\left(\frac{3}{r^3} + \frac{d^2}{r^5}\right)$ के साथ गति करता है। सिद्ध कीजिए कि बल के केन्द्र तक इसके पहुँचने का समय $\frac{d^2}{\sqrt{2\mu}}\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$ है।

A particle moves with a central acceleration $\mu\left(\frac{3}{r^3} + \frac{d^2}{r^5}\right)$ being projected from a distance d at an angle 45° with a velocity equal to that in a circle at the same distance. Prove that the time it takes to reach the centre of force is $\frac{d^2}{\sqrt{2\mu}}\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$. 20

* * *